RICERCA OPERATIVA

R.O. 03/03/2014

m.pappalardo@di.unipi.it
RICEVIMENTO lun 15:30 dip. informatica
Ricerca Operativa (Pisa University Press)

ESEMPIO DI PROBLEMA

1. Problema di PRODUZIONE

STRUTTURA SEZIONI
① Problemi ② modelli
③ Teoria
④ Algoritmi

Un'azienda produce 2 tipi di birra (A e B) dai guadagni di

A → 1000 €/quintale
B → 2000

Le risorse (limitate) che ho: Manodopera e luci
48 15

(Ho deciso settimana che servono di questi prodotti)

Matrice Tecnologica (o di composizione)

$$\begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow M \\ \leftarrow N \end{matrix}$$

A B

Manodopera e macchine servono per A e B

PROBLEMA: VOGLIO MASSIMIZZARE IL GUADAGNO
↓ passo del problema al
MODELLO (MATEMATICO)

① Introduzione di VARIABILI DECISIONALI

x_A, x_B (quanti A e B devo produrre per avere il massimo del guadagno)

(8,1) è una SOLUZIONE INAMMISSIBILE
↓
Produrrebbe 10.000 ma sfora in materie prime

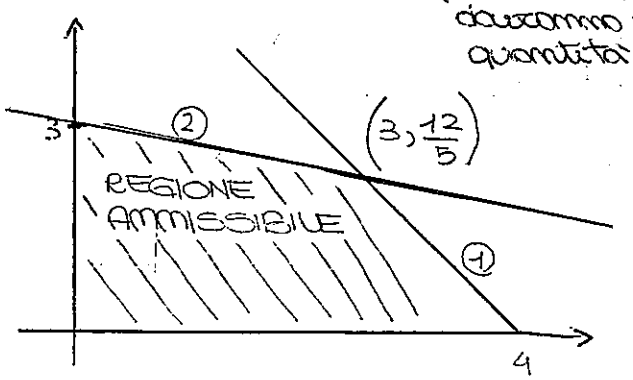
(1,1) è AMMISSIBILE e produce 3.000 a quintale ma non sappiamo se è la SOLUZIONE OTTIMA!

Intanto bisogna capire quando la SOLUZIONE è AMMISSIBILE!

IL PROBLEMA SI TRASFORMA IN: questo sistema ↓

$$\begin{cases} \max x_A + 2x_B \} \text{ obiettivo} \\ 12x_A + 5x_B \leq 48 \} \text{ vincoli sulle risorse} \\ x_A + 5x_B \leq 15 \\ x_A, x_B \geq 0 \end{cases}$$

← VINCOLI "NASCOSTI" (Ovviamente dovranno essere quantità positive)



Per TESTARE AMMISSIBILITÀ: sostituisco il punto all'interno del sistema e vedo se soddisfa i vincoli!

Qualsiasi problema PL $x, c \in \mathbb{R}^n$ $b \in \mathbb{R}^m$ $A \in M^{m \times n}$

è nella forma $\max \langle c, x \rangle$, $Ax \leq b$

↓

PRODOTTO SCALARE $(c_1x_1 + c_2x_2 + \dots c_nx_n)$

($x_A + 2x_B$ nel nostro caso

PROBLEMA DI PL = Problema in cui si massimizza una funzione obiettivo lineare con vincoli lineari!

N.B. $c \cdot x$ è lineare e tutte le funzioni lineari sono riconducibili a $c \cdot x$ (prodotto scalare)

$$\begin{bmatrix} 12 & 5 \\ 1 & 5 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 48 \\ 15 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

per i vincoli $x_A, x_B \geq 0$ ho cambiato i segni

TRICKS (identificazione dati)

① Trovare MAX $(\leq)$ o MIN $(\geq)$ è la stessa cosa!

② Se ho un vincolo con il segno = ($x_A = 5$ ad esempio) aggiungo ai vincoli sia il $\leq$ che il $\geq$ con coefficienti e termini noti cambiati di segno!

es $\begin{cases} x_A \leq 5 \\ x_A \geq 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A \leq 5 \\ -x_A \leq -5 \end{cases} \Leftrightarrow x_A = 5$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

MAX e MIN si TROVANO SEMPRE SUL BORDO

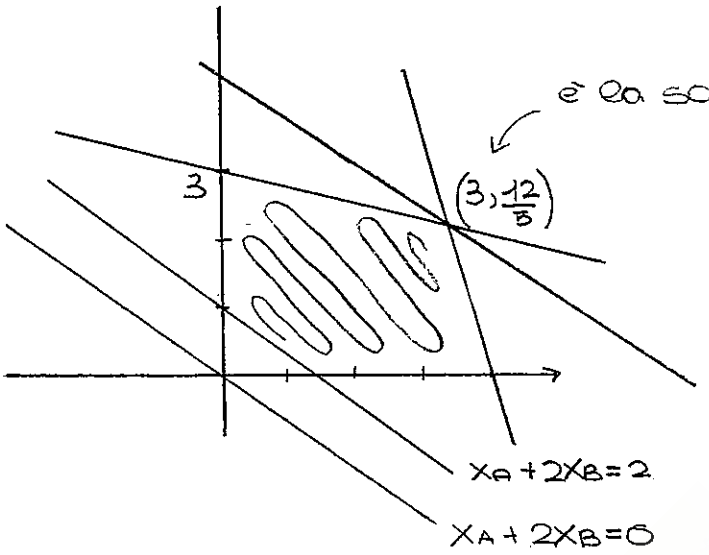
Potrei applicare ALGORITMO 2 per trovare MAX e MIN ma avrei gradiente (1,2) max nullo e quindi si troverà sul bordo ↓

ATTENZIONE! CHIUSO ≠ LIMITATO

CHIUSO = contiene tutti i punti di frontiera

I nostri insiemi (come la regione ammissibile) sono chiusi e limitati ($\leq$) include infatti la frontiera).

Applicando Farkas in $\mathbb{R}^2$ troviamo gradiente (1,2) all'interno e quindi max e min (che essendo un insieme chiuso e limitato esistono x Weierstrass) si trovano sui BORDI



MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Essendo funzione continua con un insieme chiuso e limitato esistono max e min. x Weierstrass!
Il max e min stanno dove la derivata (o gradiente in R²) si annulla per Fermat.
All'interno non si annulla mai ⇒ sta sul bordo.

master COPY COPISTERIA 050/8312126 388/9837745

GLOSSARIO

1 PROBLEMI OTTIMIZZAZIONE = problemi di minimo e massimo
2 FUNZIONE OBIETTIVO
3 VINCOLI
4 SOLUZIONE AMMISSIBILE
5 SOLUZIONE OTTIMA

master COPY COPISTERIA
050/8312126 388/9837745
MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745